XIV МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА имени ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

3 (заключительный) этап, 26–29 марта 2022 г.

***Первый день.***

**1.** Можно ли пронумеровать вершины, рёбра и грани куба различными целыми числами от –12 до 13 так, чтобы номер каждой вершины равнялся сумме номеров сходящихся в ней рёбер, а номер каждой грани равнялся сумме номеров ограничивающих её рёбер?

**2.** У царя Гиерона есть 13 металлических слитков, неразличимых на вид; царь знает, что их веса (в некотором порядке) равны   
1, 2, ..., 13 кг. Ещё у него есть прибор, в который можно положить один или несколько из имеющихся 13 слитков, и он просигналит, если их суммарный вес равен ровно 46 кг. Архимед, знающий веса всех слитков, хочет написать на двух слитках их веса и за два использования прибора доказать Гиерону, что обе надписи правильны. Как действовать Архимеду?

**3.** На стороне *BC* треугольника *ABC* отмечена точка *D*. На стороне *AB* выбрана точка *P*. Отрезки *PC* и *AD* пересекаются в точке *Q*. Точка *R* — середина отрезка *AP*. Докажите, что существует фиксированная точка *X*, через которую прямая *RQ* проходит при любом выборе точки *P*.

**4.** Натуральные числа *a*, *b* и *c*, большие 2022, таковы, что *a*+*b* делится на *c*–2022, *a*+*c* делится на *b*–2022, *b*+*c* делится на *a*–2022. Какое наибольшее значение может принимать число *a*+*b*+*c*?